

数理論理学特論

田村直之 (神戸大学)

大阪電気通信大学大学院 情報工学専攻

目標

目標

計算機科学における基礎理論としての数理論理学について、その理論体系と応用方法の概要を理解する。

教科書・参考書

- 小野寛晰著『情報科学における論理』日本評論社

成績評価

成績評価

成績評価

成績評価

- 出席

成績評価

成績評価

- 出席
- 授業中の課題

成績評価

成績評価

- 出席
- 授業中の課題
- (レポート)

数理論理学とは

- 数理論理学 (Mathematical Logic) は、数学基礎論の一種
 - 記号論理学 (Symbolic Logic) とも呼ばれる
- 計算機科学の基礎理論
 - 計算可能性の理論
 - 型理論 (関数型言語)
 - 論理型言語 (Prolog)
 - 並行・分散計算
 - システム検証
 - 人工知能
 - などなど

数理論理学の利用

- 代数学での計算と同様に，問題を論理式に記号化 (形式化) すれば，数理論理学での形式的推論の方法を用いて解 (定理) を計算することにより，元の問題に対する答を求めることができる。

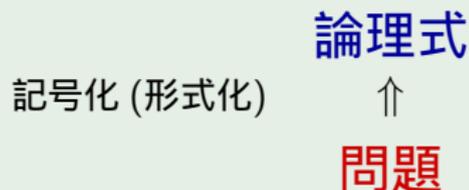
数理論理学の利用

- 代数学での計算と同様に，**問題**を**論理式**に記号化(形式化)すれば，数理論理学での**形式的推論**の方法を用いて**解**(定理)を計算することにより，元の問題に対する**答**を求めることができる。

問題

数理論理学の利用

- 代数学での計算と同様に，**問題**を**論理式**に記号化 (形式化) すれば，数理論理学での**形式的推論**の方法を用いて**解** (定理) を計算することにより，元の問題に対する**答**を求めることができる。



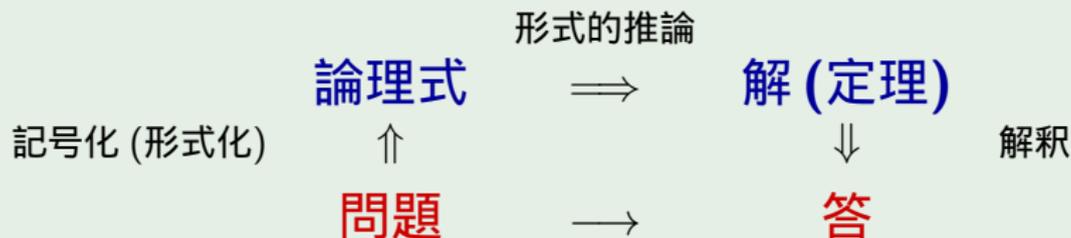
数理論理学の利用

- 代数学での計算と同様に，**問題**を**論理式**に記号化 (形式化) すれば，数理論理学での**形式的推論**の方法を用いて**解** (定理) を計算することにより，元の問題に対する**答**を求めることができる。



数理論理学の利用

- 代数学での計算と同様に，**問題**を**論理式**に記号化 (形式化) すれば，数理論理学での**形式的推論**の方法を用いて**解** (定理) を計算することにより，元の問題に対する**答**を求めることができる。



数理論理学の体系

- 古典論理
 - 命題論理
 - 一階述語論理
 - 二階述語論理
- 非古典論理
 - 直観主義論理
 - 様相論理 (時相論理)
 - 線形論理
 - 多値論理 (三値論理, ファジィ論理)

講義の概要

- 命題論理 (Propositional Logic)
 - 命題論理入門
 - SAT 問題と SAT ソルバー
- 述語論理 (Predicate Logic)
 - 述語論理入門
 - 導出原理
 - Prolog
 - Prolog のプログラム例
- (制約プログラミング)

形式的体系

数理論理学の形式的体系 (Formal System)

- 融合原理 (導出原理)
- シーケント計算
- 自然演繹
- SAT ソルバー (DPLL アルゴリズム)
- 定理証明システム

形式的体系

- 対象言語とメタ言語
- アルファベット, 文法, 公理スキーマ, 推論規則
- 構文と意味論
- 健全性と完全性
- 決定可能性

対象言語とメタ言語

- 論理について論理的に語るには注意が必要である。
 - 対象言語とメタ言語を明確に区別する必要がある。
-
- **対象言語**: 議論の対象とする言語
 - **メタ言語**: 議論に用いる言語

対象言語とメタ言語

- 日本語で英語について説明する場合
 - 対象言語は英語
 - メタ言語は日本語

対象言語とメタ言語

- 日本語で英語について説明する場合
 - 対象言語は英語
 - メタ言語は日本語

英語で英語について説明する場合，混乱が生じる．

- Verb is a noun. (動詞は名詞である)

対象言語とメタ言語

- 日本語で英語について説明する場合
 - 対象言語は英語
 - メタ言語は日本語

英語で英語について説明する場合，混乱が生じる．

- Verb is a noun. (動詞は名詞である)
- “Verb” is a noun. (「動詞」は名詞である)
- 対象言語の語とメタ言語の語を明確に区別する必要がある．

形式的体系

形式的体系 (Formal System)

「正しい」と考えている式 (記号列) を機械的 (形式的) に導き出すためのシステム。通常、以下により定められる。

- **アルファベット** (alphabet):
用いる記号の種類
- **文法** (grammar):
整形式 (well-formed) の式を定める
- **公理スキーマ** (axiom schemata):
無条件に「正しい」とみなす式のパターン
- **推論規則** (inference rules):
「正しい」式から他の「正しい」式を導出するための規則

形式的体系の例 1

MIU-システム

Hofstadter 著 “Gödel, Escher, Bach” の MIU-システム

- アルファベット: $\{M, I, U\}$
- 文法: $(M | I | U)^*$
- 公理スキーマ:
 - MI
- 推論規則:
 - 規則 1: $xI \rightarrow xIU$
 - 規則 2: $Mx \rightarrow Mxx$
 - 規則 3: $xIIIy \rightarrow xUy$
 - 規則 4: $xUUy \rightarrow xy$

- “M”, “I”, “U” は対象言語の記号
- “x”, “y”, “ \rightarrow ” はメタ言語の記号

形式的体系の例 1

MIU-システム

- アルファベット: $\{M, I, U\}$
- 文法: $(M | I | U)^*$
- 公理スキーマ:
 - MI
- 推論規則:
 - 規則 1: $xI \rightarrow xIU$
 - 規則 2: $Mx \rightarrow Mxx$
 - 規則 3: $xIIIIy \rightarrow xUy$
 - 規則 4: $xUUy \rightarrow xy$

問題

- MUIIUは導出できるか?

形式的体系の例 1

問題

- MUIIUは導出できるか?

- | | | |
|-----|---------|--------------------------------------|
| (1) | MI | 公理スキーマ |
| (2) | MII | 規則 2 ($Mx \longrightarrow Mxx$) |
| (3) | MIIII | 規則 2 ($Mx \longrightarrow Mxx$) |
| (4) | MIIIIU | 規則 1 ($xI \longrightarrow xIU$) |
| (5) | MUIU | 規則 3 ($xIIIy \longrightarrow xUy$) |
| (6) | MUIUUIU | 規則 2 ($Mx \longrightarrow Mxx$) |
| (7) | MUIIU | 規則 4 ($xUUy \longrightarrow xy$) |

形式的体系の例 1

問題

- MUIIUは導出できるか?

- | | | |
|-----|---------|--------------------------------------|
| (1) | MI | 公理スキーマ |
| (2) | MII | 規則 2 ($Mx \longrightarrow Mxx$) |
| (3) | MIIII | 規則 2 ($Mx \longrightarrow Mxx$) |
| (4) | MIIIIU | 規則 1 ($xI \longrightarrow xIU$) |
| (5) | MUIU | 規則 3 ($xIIIy \longrightarrow xUy$) |
| (6) | MUIUUIU | 規則 2 ($Mx \longrightarrow Mxx$) |
| (7) | MUIIU | 規則 4 ($xUUy \longrightarrow xy$) |

問題

- MUは導出できるか?

形式的体系の例 2

pq-システム

Hofstadter 著 “Gödel, Escher, Bach” の pq-システム

- アルファベット: $\{p, q, -\}$
- 文法: $-^+p-^+q-^+$
- 公理スキーマ:
 - $xp-qx-$ ($x \in \{-\}^+$)
- 推論規則:
 - $xpyqz \rightarrow xpy-qz-$ ($x, y, z \in \{-\}^+$)

形式的体系の例2

pq-システム

Hofstadter 著 “Gödel, Escher, Bach” の pq-システム

- アルファベット: $\{p, q, -\}$
- 文法: $-^+p-^+q-^+$
- 公理スキーマ:
 - $xp-qx-$ ($x \in \{-\}^+$)
- 推論規則:
 - $xpyqz \rightarrow xpy-qz-$ ($x, y, z \in \{-\}^+$)

問題

- 何が導出されているのか?

構文と意味論

構文 (Syntax)

対象言語の文法および何が「導出可能」かを定める。

意味論 (Semantics)

対象言語の式 (記号列) が表すものの意味 (解釈) および何が「正しい」かを定める。

構文と意味論

構文 (Syntax)

対象言語の文法および何が「導出可能」かを定める。

意味論 (Semantics)

対象言語の式 (記号列) が表すものの意味 (解釈) および何が「正しい」かを定める。

pq-システム

記号	解釈
p	+ (加算)
q	= (等号)
-	1
--	2
...	...

自然数の加算として等号が成り立っていれば「正しい」とする。

構文と意味論

式 A が「導出可能」な時，以下のように表すことにする．

$$\vdash A$$

式 A が「正しい」時，以下のように表すことにする．

$$\models A$$

構文と意味論

式 A が「導出可能」な時，以下のように表すことにする．

$$\vdash A$$

式 A が「正しい」時，以下のように表すことにする．

$$\models A$$

pq-システム

$\vdash A$	A が公理スキーマと推論規則で導出可能
$\models A$	A を加算と解釈した等式が成り立つ

健全性と完全性

- 導出された式はすべて正しいか?
- すべての正しい式を導出可能か?

健全性と完全性

- 導出された式はすべて正しいか?
- すべての正しい式を導出可能か?

健全性 (Soundness)

$$\vdash A \implies \models A$$

完全性 (Completeness)

$$\models A \implies \vdash A$$

健全性と完全性

- 導出された式はすべて正しいか?
- すべての正しい式を導出可能か?

健全性 (Soundness)

$$\vdash A \implies \models A$$

完全性 (Completeness)

$$\models A \implies \vdash A$$

問題

- pq-システムは健全か?
- pq-システムは完全か?

決定可能性

決定可能性 (Decidability)

ある性質について、その性質を持つかどうかを判定するアルゴリズム (有限ステップ内で必ず停止する) が存在する時、その性質は決定可能であるという。

- 形式的体系の導出可能性は決定可能な場合も決定不能な場合もある。

決定可能性

決定可能性 (Decidability)

ある性質について、その性質を持つかどうかを判定するアルゴリズム (有限ステップ内で必ず停止する) が存在する時、その性質は決定可能であるという。

- 形式的体系の導出可能性は決定可能な場合も決定不能な場合もある。

問題

- MIU-システムの導出可能性は決定可能か?
- pq-システムの導出可能性は決定可能か?